

# Bubble 小波用于图像边缘检测的一些讨论

玉振明<sup>1)</sup> 毛士艺<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(梧州学院信号处理实验室,梧州 543002) <sup>2)</sup>(北京航空航天大学 203 教研室,北京 100083)

**摘要** 研究了 Bubble 小波(墨西哥帽小波)的特点,指出有些文献中把 Bubble 小波用于多分辨率分析的错误,认为墨西哥帽小波只能用于连续小波变换,且不存在多分辨率分析,指出 Bubble 小波在连续小波变换下应用于检测图像边缘是可行的,并给出了 Bubble 小波用于连续小波变换的近似卷积模板,实验结果表明了其用于边缘检测的有效性。

**关键词** 多分辨率分析 Bubble 小波 边缘检测

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)10-1992-05

## Discussions on Bubble Wavelet Applying to Image Edge Detection

YU Zhen-ming<sup>1)</sup>, MAO Shi-yi<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Signal Processing Laboratory of Wuzhou University, Wuzhou 543002) <sup>2)</sup>(Group 203 Beihang University, Beijing 100083)

**Abstract** The characters of Bubble wavelet (Mexico hat wavelet) have been researched. We discussed the mistakes in some literatures that Mexico hat wavelet is applied to multi-resolution analysis, This paper point out that Mexico hat wavelet can only be applied to continuum wavelet transform (CWT) and its multi-resolution analysis does not exist. We suggest that it is applicable for bubble wavelet to detect image edge under continuum wavelet transform. The template for CWT is presented and is proved efficiency use for edge detection by experiment.

**Keywords** multi-resolution analysis, bubble wavelet, edge detection

## 1 引言

图像边缘的检测和提取一直是图像处理的研究热点。由于 Bubble 小波对人类视觉的某些行为有较好的模拟,因此人们试图将它用于图像边缘的检测。近年来,国内有些文献对 Bubble 小波(墨西哥帽小波)进行了研究并把它主要应用到图像边缘检测<sup>[1-4]</sup>,这些文献把 Bubble 小波用于离散小波变换,并用多分辨率分析的思想推导出了双尺度方程,由此得到了用于 MALLAT 算法的滤波器系数,这些结果曾被多篇文献引用<sup>[5-7]</sup>。直到 2007 年国内仍有学者把 Bubble 小波用于多分辨率分析进行图像边缘

检测,只是在研究中对 Bubble 小波参数进行了一些改变<sup>[7]</sup>。本文认为把 Bubble 小波应用于离散小波变换是不妥当的,所构造的双尺度关系不能满足真正多分辨率分析的要求,所得到的滤波器数据是否可靠值得商榷。事实上,著名软件 Matlab 在它的帮助说明文件中明确说明墨西哥帽小波的双尺度函数不存在,且不存在离散小波变换,这些观点支持了本文的结论。Bubble 小波是由高斯函数的二阶导数得到的,是一种对称小波,适用于对信号奇异点的跨零点检测,运用其对图像边缘的检测应该是可行的,但只能以连续小波变换的方式用于跨零点边缘检测。由于进行连续小波变换时必须进行积分的数值计算,计算量大,本文通过对 Bubble 小波进行抽样

基金项目:国家自然科学基金项目(60502019);广西自然科学基金项目(桂科自 0832283)

收稿日期:2008-08-08;改回日期:2009-06-03

第一作者简介:玉振明(1963 ~ ),男,教授。2005 年于北京航空航天大学获信号与信息处理专业博士学位。主要研究方向为图像处理、自适应信号处理理论等。E-mail:yumingming@vip.sina.com

得到用于连续小波变换的近似卷积模板,可用于对离散图像进行近似的小波变换,再通过跨零点检测实现图像的边缘检测,实验证实了这种近似连续小波变换用于图像边缘检测是可行的。

## 2 Bubble 小波边缘检测原理

Bubble 小波实质是高斯函数二次导数的负值,高斯函数和 Bubble 小波分别为

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

当  $\sigma = 1$  时,加上适当的系数,式(2)常被称为墨西哥帽小波。高斯函数及墨西哥帽小波如图 1 和图 2 所示。可见墨西哥帽小波是一种对称小波。

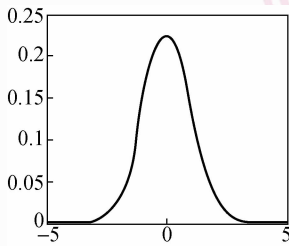


图 1 高斯函数

Fig. 1 Gaussian function

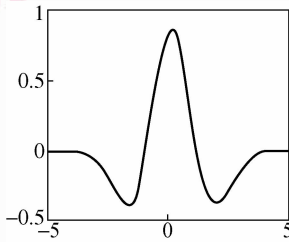


图 2 墨西哥帽小波

Fig. 2 Mexico hat wavelet

信号  $f(x)$  在尺度  $s$  下的小波变换是:

$$\begin{aligned} W_s f(x) &= f(x) * \psi_s(x) \\ &= \int f(t) \psi_s(x-t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\psi_s(x) = \frac{1}{s} \phi\left(\frac{x}{s}\right)$  是由满足容许条件的母小波经尺度因子伸缩而得。由式(2)代入式(3)可得:

$$W_s f(x) = f * \left( s^2 \frac{d^2 \theta_s}{dx^2} \right) (x) = s^2 \frac{d^2 (f * \theta_s)}{dx^2} (x) \quad (4)$$

因为高斯函数相当于低通滤波器,所以信号的 Bubble 小波变换实质就是用高斯函数对信号进行平滑后的二阶导数,信号中的奇点表现为小波变换的跨零点(见文献[8]、[10])。2 维情况下高斯函数和 Bubble 小波如下:

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -\left(\frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \theta(y)}{\partial^2 y}\right) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

对 2 维图像信号  $f(x, y)$  的 Bubble 小波变换同理可以认为是信号先经过高斯滤波器平滑后再求二阶导数,图像的边缘即图像中的奇异点经高斯函数打磨平滑后的二阶导数就是小波变换后的跨零点,图像的边缘检测对应于小波变换域的跨零点检测,这就是 Bubble 小波用于图像边缘检测的原理。

## 3 Bubble 小波不能用于多分辨率分析

文献[1]~[4]将 Bubble 小波用于多分辨率分析然后进行图像边缘检测,其基本思想是先证明高斯函数是黎斯基,再推断存在有以高斯函数为尺度函数的双尺度关系,然后构造出双尺度方程,由双尺度方程推导出一组滤波器系数,从而将 Mallat 算法应用于 Bubble 小波。但本文将指出这些文献所构造的双尺度关系并不成立,因此,由此得到的滤波器系数就不一定可靠。下面是这些文献对 Bubble 小波双尺度关系的主要构造过程。取高斯函数及对应的 Bubble 小波如下:

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (7)$$

$$\psi(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (8)$$

可见式(8)也就是通常所说的墨西哥帽小波,式(7)、式(8)对应的傅里叶变换为

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \quad (9)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \quad (10)$$

$$\hat{G}(\omega) = \sum_k g_k(k) e^{-j\omega k} \quad (16)$$

多分辨率分析必须满足如下双尺度方程:

$$\phi_{1/2}(x) = \sum_k h_k(k) \phi(x - k) \quad (11)$$

$$\psi_{1/2}(x) = \sum_k g_k(k) \psi(x - k) \quad (12)$$

将式(9)、式(10)代入式(13)、式(14)得到:

$$H(\omega) = \exp\left(-\frac{3\omega^2}{2}\right) \quad (17)$$

$$G(\omega) = 4\omega^2 \exp\left(-\frac{3\omega^2}{2}\right) \quad (18)$$

式(11)、式(12)两边傅里叶变换得到:

$$\hat{\phi}(2\omega) = \sum_k h_k(k) e^{j\omega k} \hat{\phi}(\omega) = \hat{H}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (13)$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = \sum_k g_k(k) e^{j\omega k} \hat{\psi}(\omega) = \hat{G}(\omega) \hat{\psi}(\omega) \quad (14)$$

文献[1]~[4]的做法是对式(17)、式(18)进行傅里叶反变换得到时域或空域的  $h(x)$  和  $g(x)$ , 然后在 -3 到 3 范围内按间隔 1 抽样得到滤波器系数如表 1 所示。按这样思想很容易推出 2 维情况下的滤波器:

$$h(m, n) = h(m)h(n) \quad (19)$$

$$g(m, n) = \frac{1}{2}(g(m)h(n) + h(m)g(n)) \quad (20)$$

式中,

$$\hat{H}(\omega) = \sum_k h_k(k) e^{-j\omega k} \quad (15)$$

表 1 滤波器系数  
Tab. 1 Coefficient of filter

	$k$						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(k)$	0.054 1	0.118 3	0.195 0	0.230 3	0.195 0	0.118 3	0.051 4
$g(k)$	-0.173 0	-0.525 0	0.173 3	0.307 1	0.173 3	-0.525 6	-0.137 0

国内不少文献运用了上述的推导或直接引用了上述结果。

然而上述的推导有不妥当之处,原因在于双尺度关系是臆造和不正确的,小波若要能用于多分辨率分析是要满足一系列苛刻条件的,即

存在嵌套子空间逼近序列  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ , 它满足下列要求:

(1)  $\dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subseteq L^2(\mathbf{R})$ ,

$\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R})$ ;

(2)  $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) \mid \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), k \in \mathbf{Z}\}$ ;

(3)  $\phi(x) = \sum_k h_k(k) \phi(2x - k), \{h_n\} \in l^2$ ;

(4)  $\{\phi(t - k)\}$  是黎斯基。

文献[1]~[4]中基本都是先证明式(7)构成黎斯基,然后就认为存在双尺度关系式(11)、式(12)。事实上即使式(7)真的满足黎斯基,也只是

构成多尺度逼近的条件,还不能说明就能构成一个多尺度分析,即不能说明就存在一个以高斯函数为生成元的双尺度关系。如式(7)确是黎斯基也只说明信号可以由高斯函数的平移构成的一组基来逼近表示,但并不能说明高斯函数的伸缩和平移能构成一串嵌套子空间的基,即上述条件 2 不一定成立,更不能说明存在空间传递的双尺度关系,即条件 3 不一定成立,可以说黎斯基与双尺度方程并无必然的关系。双尺度关系是有其深刻数学和物理意义的,一方面,它是一个空间投影关系,说明一个子空间内的基函数可由它包含于的子空间的基来构造,即

$$\phi(x) = \sum_k h_k(k) \phi(2x - k)$$

系数  $h(k)$  是在各维上的投影;从物理意义上说  $h(k)$  是低通滤波器,反映的是分解得到的上一级是对信号较精细的逼近,而经低通滤波后得到下一级

是对信号较粗糙的逼近。并不是说某个函数的傅里叶变换满足式(13)或式(14)就能得到一个双尺度关系的生成元,多分辨率分析满足式(13)和式(14),但反之则不成立。如能简单地用  $\hat{\phi}(2\omega)/\hat{\phi}(\omega), \hat{\psi}(2\omega)/\hat{\phi}(\omega)$  构造一个双尺度关系,那么可随便用一对存在傅里叶变换的函数就能构造双尺度关系了,这显然是不对的。实际上,构造一个小波的多分辨率分析并不容易,也就是说寻找一个合适的双尺度关系是困难的。一个明显的事实是双尺度方程中的滤波器式(15)和式(16)都是频率的周期函数,但式(17)和式(18)都不是周期函数,所以把式(17)、式(18)当做双尺度关系的滤波器是不妥当的。如果只是通过式(17)、式(18)反变换抽样后得到一组系数,就认为其就是一组反映双尺度关系的滤波器,那么这组系数对应的生成元或尺度函数就肯定不是原来选的式(7)即高斯函数了,也没有理由能说明这么一个双尺度关系就是 Bubble 小波或墨西哥帽小波多分辨率分析的双尺度关系。事实上,著名的仿真软件 Matlab 在它的帮助文件中明确说明墨西哥帽小波的尺度函数不存在,且不存在离散小波变换,只能用于连续小波变换。(详见 Matlab 帮助以及函数 waveinfo('mexh'))。

### 4 连续小波变换近似卷积模板及仿真实验结果

由于墨西哥帽小波不适用于离散小波变换,因此计算小波变换只能用连续积分的方式,即对于二进制尺度  $2^j$  小波变换必须计算数值积分:

$$W_{2^j} f(x, y) = f(x, y) * \psi_{2^j}(x, y) = \frac{1}{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, u) \psi\left(\frac{x-t}{2^j}, \frac{y-u}{2^j}\right) dt du \tag{21}$$

因此,严格地说墨西哥帽小波不适用于离散数字图像处理,但是如果把 2 维墨西哥帽小波:

$$\psi(x, y) = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \tag{22}$$

按一定间隔抽样然后再与离散图像卷积,可作为式(21)连续积分的近似,其本质就是数字图像作为连续图像的取样和小波函数的取样的卷积作为数值的积分的梯形近似。所以在一定误差范围内用墨西哥帽小波处理离散图像是可行的。下面就是小波式(22)在尺度  $2^0$  下的积近似模板 ( $[-3, 3]$  之间隔 1

抽样得到):

-0.00	-0.01	-0.03	-0.04	-0.03	-0.01	-0.00
-0.01	-0.05	-0.12	-0.14	-0.12	-0.05	-0.01
-0.03	-0.12	0	0.30	0	-0.12	-0.03
-0.04	-0.14	0.30	1.00	0.30	-0.14	-0.04
-0.03	-0.12	0	0.30	0	-0.12	-0.03
-0.01	-0.05	-0.12	-0.14	-0.12	-0.05	-0.01
-0.00	-0.01	-0.03	-0.04	-0.03	-0.01	-0.00

随着尺度增加模板也增大,如在尺度  $2^1$  和  $2^2$  下模板应在  $[-6, 6]$  和  $[-12, 12]$  之间抽样得到,抽样间隔不变,模板大小也急剧增大。用抽样得到的模板与离散图像进行卷积就得到了在一定尺度下的近似连续小波变换。得到卷积后的图像,再对图像进行跨零点检测,对属于跨零点的像素赋予灰度 255,其余像素灰度赋为 0,由此得到边缘图像。笔者曾用 Lena 图像进行实验(图 3),检测出的边缘图像效果较好,图 4 和图 5 分别是在尺度  $2^1$  和  $2^2$  下用



图 3 Lena 图像

Fig. 3 Lena picture



图 4 尺度  $2^1$  边缘

Fig. 4 Edge on scale  $2^1$

图 5 尺度  $2^2$  边缘Fig. 5 Edge on scale  $2^2$ 

跨零点方法检测得到的边缘图像,可见尺度增大后,一些细小的边缘被平滑了。

## 5 结 论

讨论了 Bubble 小波(墨西哥帽小波)用于图像跨零点边缘检测,指出 Bubble 小波不能用于离散变换和多分辨率分析,说明有些文献用 Bubble 小波构造多分辨率分析是错误的。墨西哥帽小波只能用于连续小波变换。给出了墨西哥帽小波用于连续小波变换的近似卷积模板,并说明了通过用模板和数字图像卷积可实现近似连续小波变换,然后进行跨零点检测可实现边缘的提取,边缘检测的效果也较好。

### 参考文献 (References)

- 1 Jia Tian-xu, Zheng Nan-ning. Multiscales edges detection based on bubble wavelet[J]. Acta Electronica Sinica, 1996, **24**(4): 117-121. [贾天旭,郑南宁. 基于 Bubble 小波的多尺度边缘提取[J]. 电子学报,1996, **24**(4): 117-121.]
- 2 Zheng Nan-ning. Computer Vision and Pattern Recognition [M].

- Beijing: National Defence Industry Press,1998: 390-385. [郑南宁. 计算机视觉与模式识别 [M]. 北京,国防工业出版社,1998: 390-385.]
- 3 Yuan Xiao, Yu Jue-bang. Constructing wavelets based on bubble functions[J]. Signal Processing, 1999, **15**(1): 37-41. [袁晓,虞厥邦. 基于 Bubble 函数的子波构造[J]. 信号处理, 1999, **15**(1): 37-41.]
- 4 Zhao Xi-an, Li De-ren. Constructing two dimension symmetric wavelets for extracting edge features of image at multiscales[J]. Acta Geodaetica Et Cartographica Sinica, 2003, **32**(4): 313-318. [赵西安,李德仁. 2 维对称小波与多尺度影像边缘提取[J]. 测绘学报,2003, **32**(4): 313-318.]
- 5 Zhu Hong-qing, Lin Liang-ming, Yan Guo-zheng. Estimating lumen center of dark region in colon image via bubble wavelet[J]. Chinese Journal of Biomedical Engineering, 2002, **21**(5): 437-442. [朱宏擎,林良明,颜国正. 基于 Bubble 小波的结肠镜图像暗区中心点的估计[J]. 中国生物医学工程学报,2002, **21**(5): 437-442.]
- 6 Pei Ke-min. Detecting week and small infranred target based on bubble wavelet transform[J]. Mathematica Applicata, 2004, **17**(1): 127-131. [裴克明. 基于 Bubble 小波变换的红外弱小目标检测[J]. 应用数学, 2004, **17**(1): 127-131.]
- 7 Yu Rui-xing, Li Yan-jun, Zhang Ke. Multi-resolution edge extraction way based on improved bubble function[J]. Fire Control and Command Control, 2007, **32**(7): 8-10. [余瑞星,李言俊,张科. 改进 Bubble 函数的多分辨率边缘提取方法[J]. 火力与指挥控制, 2007, **32**(7): 8-10.]
- 8 Xue Jia-xiang, Jia Lin, Li Hai-bao. Edge detection of CO<sub>2</sub> arc welding pool image based Bubble wavelet and zero crossing[J]. Transactions of the China Welding Institution, 2004, **25**(1): 87-90. [薛家祥,贾林,李海宝. CO<sub>2</sub> 焊熔池图像的 Bubble 小波零交叉边缘检测[J]. 焊接学报, 2004, **25**(1): 87-90.]
- 9 Mallat S. Zero-crossing of a wavelet transform[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, **37**(4): 1019-1033.
- 10 Zeev Berman, John S. Properties of the multiscale maxima and zero-crossing representations [J]. IEEE Transactions on information theory, 1993, **41**(12): 3216-3231.
- 11 Mallat S, Zhong S. Characterization of signals form multiscaledges [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1992, **14**(7): 710-732.